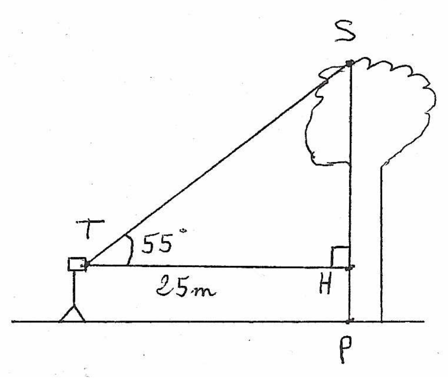
Correction du devoir surveillé n° 7.

☺ Exercice 1 :



Un géomètre mesure, à l'aide d'un théodolite, la hauteur d'un arbre.
En plaçant son instrument à 25 m du pied de l'arbre, il vise le sommet et mesure alors un angle de 55° avec l'horizontale.
Sachant que le théodolite mesure 1,50 m de haut, quelle est la hauteur de l'arbre ? Arrondir le résultat au dixième de mètre.

Correction :

Dans le triangle STH rectangle en H, on a :

$$\tan\left(\widehat{STH}\right) = \frac{SH}{TH}$$

$$\tan(55) = \frac{SH}{25}$$

donc $\boxed{SH = 25 \times \tan(55)}$.

D'où : $SP = SH + HP$

$$SP = 25 \times \tan(55) + 1{,}5$$

$$\boxed{SP \approx 37{,}2 \text{ m}}.$$

L'arbre mesure donc environ 37,2 m de haut.

☺ Exercice 2 :

On considère le programme de calcul ci-contre :

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 2.
- Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi.
- Soustraire le double du nombre choisi.
- Ecrire le résultat.

1) Ecrire les calculs permettant de vérifier que si on choisit le nombre 6, alors on obtient 36.
2) Quel nombre obtient-on si on choisit :

a) 0,3 ? **b)** -8 ? **c)** $\frac{2}{7}$?

Faire apparaître les calculs détaillés sur la copie.
3) A partir des quatre exemples précédents, formuler une conjecture.
4) On souhaite tester cette conjecture avec un tableur pour tous les nombres allant de 0,5 en 0,5 à partir d'un nombre quelconque que l'on entre dans la cellule **A1**.
a) Indiquer dans la cellule **A2** la formule à saisir donnant le nombre obtenu en ajoutant 0,5 à celui entré dans la cellule **A1**.
b) Indiquer dans la cellule **B1** la formule à saisir pour obtenir le résultat du programme de calcul lorsque le nombre choisi au départ est celui entré dans la cellule **A1**.
c) Indiquer dans la cellule **C1** la formule à saisir pour obtenir le résultat conjecturé à la **question 3** lorsque le nombre choisi au départ est celui entré dans la cellule **A1**.
d) Indiquer dans les cellules **B2** et **C2** les formules obtenues en copiant celles saisies dans les cellules **B1** et **C1**.

	A	**B**	**C**	**D**
1	[redacted]	$=(A_1+2)*A_1-2*A_1$	$=A_1^2$	
2	$=A_1+0{,}5$	$=(A_2+2)*A_2-2*A_2$	$=A_2^2$	
3				

5) Démontrer la conjecture.

Correction :

1) Si on choisit 6 :

- 6
- $6+2=8$
- $8\times 6=48$
- $48-2\times 6=48-12=36$
- 36.

Donc, si on choisit 6, alors on obtient 36.

2) a) Si on choisit 0,3 :

- 0,3
- $0,3+2=2,3$
- $2,3\times 0,3=0,69$
- $0,69-2\times 0,3=0,69-0,6=0,09$
- 0,09.

Donc, si on choisit 0,3, alors on obtient 0,09.

b) Si on choisit -8 :

- -8
- $-8+2=-6$
- $(-6)\times(-8)=48$
- $48-2\times(-8)=48+16=64$
- 64.

Donc, si on choisit -8, alors on obtient 64.

c) Si on choisit $\frac{2}{7}$:

- $\frac{2}{7}$
- $\frac{2}{7}+2=\frac{2}{7}+\frac{14}{7}=\frac{16}{7}$
- $\frac{16}{7}\times\frac{2}{7}=\frac{32}{49}$
- $\frac{32}{49}-2\times\frac{2}{7}=\frac{32}{49}-\frac{4}{7}=\frac{32}{49}-\frac{28}{49}=\frac{4}{49}$
- $\frac{4}{49}$.

Donc, si on choisit $\frac{2}{7}$, alors on obtient $\frac{4}{49}$.

3) Conjecture :

$36 = 6^2$; $0,09 = 0,3^2$; $64 = (-8)^2$; $\frac{4}{49} = \left(\frac{2}{7}\right)^2$.

Il semblerait que le résultat du programme de calcul soit le carré du nombre choisi au départ.

5) Démonstration de la conjecture :

Soit x le nombre choisi au départ.

- x
- $x+2$
- $(x+2)x$
- $R=(x+2)x-2x$.

$R=(x+2)x-2x$

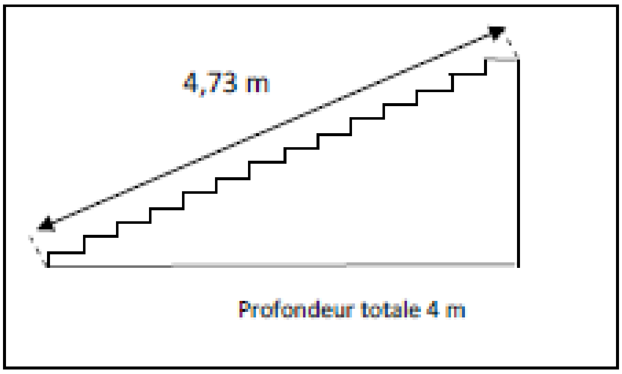
$R=x^2+\cancel{2x}-\cancel{2x}$

$\boxed{R=x^2}$.

Si le nombre choisi au départ est x, alors on obtient comme résultat x^2, c'est-à-dire le carré du nombre choisi au départ : la conjecture est donc vraie.

☺ **Exercice 3 :**

Pour qu'un escalier soit conforme aux normes, la hauteur de chaque marche doit être comprise entre 17 cm et 20 cm.
L'escalier représenté sur le schéma ci-contre est-il conforme aux normes ?



Toute de trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Correction :

En désignant par h la hauteur de l'escalier exprimée en mètres, on a, d'après le théorème de Pythagore :

$4,73^2 = 4^2 + h^2$

donc $h^2 = 4,73^2 - 4^2$

$h^2 = 22,3729 - 16$

$h^2 = 6,3729$.

D'où : $\boxed{h = \sqrt{6,3729}\text{ m}}$

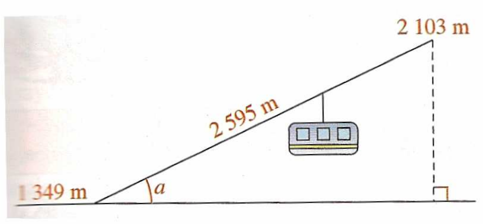
$\boxed{h \approx 2,52\text{ m.}}$

L'escalier mesure donc $\sqrt{6,3729}$ m de haut, soit environ 2,52 m.

L'escalier comporte 14 marches.
$\sqrt{6,3729} \div 14 \approx 0,18$.
Chaque marche a une hauteur d'environ 0,18 m, soit 18 cm.
$17 < \sqrt{6,3729} \div 14 < 20$: l'escalier est donc conforme aux normes.

☺ Exercice 4 :

Le départ d'un téléphérique se situe à une altitude de 1 349 m.
L'arrivée est à une altitude de 2 103 m.
Le câble (supposé tendu) mesure 2 595 m de long.
Déterminer la mesure a arrondie au degré de l'angle formé par le câble avec l'horizontale.



Correction :

Dans le triangle *SDH* rectangle en *H*, on a :

$$\sin\left(\widehat{SDH}\right) = \frac{SH}{SD}$$

$$\sin a = \frac{2103 - 1349}{2595}$$

$$\sin a = \frac{754}{2595}.$$

D'où : $\boxed{a \approx 17°}$.

Le câble du téléphérique fait donc un angle d'environ 17° avec l'horizontale.

☺ Exercice 5 :

1) On considère la fonction *f* qui, à un nombre, associe son double.
Définir la fonction *f* à l'aide d'une notation : $f : x \mapsto 2x$.

2) On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.
Définir la fonction *g* à l'aide d'une phrase : *g* est la fonction qui, à un nombre, associe son inverse.

3) On considère une fonction *h*.
a) Compléter : L'image d'un nombre *x* par la fonction *h* se note $h(x)$.

b) Traduire l'égalité $h(2) = 5$ par une phrase avec le mot « image » :
5 est l'image de 2 par la fonction *h*.

c) Traduire l'égalité $h(4) = 3$ par une phrase avec le mot « antécédent » :
4 est un antécédent de 3 par la fonction *h*.

4) On considère une fonction *i* telle que : $i : 6 \mapsto 2$ $\quad i : 0 \mapsto 4$ $\quad i : 2 \mapsto 3$ $\quad i : 5 \mapsto 3$
$i : -5 \mapsto 1$ $\quad i : 4 \mapsto 5$ $\quad i : -9 \mapsto 0$ $\quad i : 1 \mapsto 7$.

a) Quelle est l'image de 1 par la fonction *i* ? L'image de 1 par la fonction *i* est 7.
Traduire cette phrase par une égalité : $i(1) = 7$.

b) Donner un antécédent de 2 par la fonction *i* ? 6 est un antécédent de 2 par la fonction *i*.

c) Compléter : $i(2) = 3$ et $i(4) = 5$.

5) On considère la fonction $j : x \mapsto -2 + 3x$.

Calculer l'image de 5 par la fonction *j* :

$$j(5) = -2 + 3 \times 5$$

$$j(5) = -2 + 15$$

$$\boxed{j(5) = 13.}$$

6) On considère la fonction *k* définie par $k(x) = 2x^2 - 5x + 4$.

Vérifier par le calcul que le nombre 3 est un antécédent du nombre 7 par la fonction *k* :

$$k(3) = 2 \times 3^2 - 5 \times 3 + 4$$

$$k(3) = 2 \times 9 - 15 + 4$$

$$k(3) = 18 - 11$$

$$\boxed{k(3) = 7.}$$