# ARITHMETIQUE.

## I) Multiples et diviseurs d'un nombre entier naturel :

### 1) Rappel : Division euclidienne :

**Exemple :**

Voici toutes les décompositions possibles de 51 sous la forme $6\times q+r$, où $q$ et $r$ sont des entiers naturels :

$$51=6\times 0+51$$
$$51=6\times 1+45$$
$$51=6\times 2+39$$
$$51=6\times 3+33$$
$$51=6\times 4+27$$
$$51=6\times 5+21$$
$$51=6\times 6+15$$
$$51=6\times 7+9$$
$$51=6\times 8+3.$$

Parmi toutes ces décompositions, seule la dernière est telle que $r<6$ : c'est la division euclidienne de 51 par 6.

**Propriété :**

On rappelle la propriété suivante (admise) :

Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels avec $b$ non nul.
Il existe un unique couple d'entiers naturels $(q;r)$ tel que : $a=b\times q+r$ et $0\leqslant r<b$.

Effectuer la division euclidienne de $a$ par $b$, c'est déterminer cet unique couple $(q;r)$.

Dans la division euclidienne de $a$ par $b$ : $a$ s'appelle le dividende, $b$ le diviseur, $q$ le quotient entier et $r$ le reste.

dividende = diviseur × quotient + reste et reste < diviseur.

| dividende | diviseur |
|---|---|
| reste | quotient (entier) |

Dans la division euclidienne de 51 par 6, le dividende est 51, le diviseur est 6, le quotient est 8 et le reste est 3.

### 2) Multiples et diviseurs d'un nombre entier naturel :

#### a) Définition :

Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels non nuls.

| On dit que | $a$ est un multiple de $b$<br>$a$ est divisible par $b$<br>$b$ est un diviseur de $a$<br>$b$ divise $a$ | s'il existe un entier naturel $c$ tel que $a=b\times c$. |
|---|---|---|

**b) Exemples :**

18 est un multiple de 6 car $18 = 6 \times 3$ et 3 est un nombre entier.
9 est un diviseur de 45 car $45 = 9 \times 5$ et 5 est un nombre entier.
32 est divisible par 8 car $32 = 8 \times 4$ et 4 est un nombre entier.
7 divise 42 car $42 = 7 \times 6$ et 6 est un nombre entier.
Les diviseurs de 36 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36.
15 ; 30 et 45 sont trois multiples de 15.

**c) Remarques :**

- Tout nombre entier naturel non nul possède au moins un diviseur (c'est 1).

- Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 possède au moins deux diviseurs (1 et lui-même).

- Tout nombre entier naturel non nul possède un nombre fini de diviseurs : un nombre entier naturel *a* possède au plus *a* diviseurs.

- Tout nombre entier naturel non nul possède une infinité de multiples : les multiples d'un nombre entier naturel *a* non nul sont $a$ ; $2a$ ; $3a$ ; $4a$ …

**d) Méthodes :**

Soient *a* et *b* deux nombres entiers naturels non nuls.
Pour savoir si *a* est divisible par *b*, on peut poser la division euclidienne de *a* par *b* :
- si le reste est nul, alors *a* est divisible par *b* ;
- sinon, *a* n'est pas divisible par *b*.

On peut aussi, en priorité, utiliser les critères de divisibilité suivants :

Si le chiffre des unités d'un nombre entier est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8, alors ce nombre est divisible par 2.
Si le chiffre des unités d'un nombre entier est 0 ou 5, alors ce nombre est divisible par 5.
Si le chiffre des unités d'un nombre entier est 0, alors ce nombre est divisible par 10.

Si la somme des chiffres d'un nombre entier est un multiple de 3, alors ce nombre est divisible par 3.
Si la somme des chiffres d'un nombre entier est un multiple de 9, alors ce nombre est divisible par 9.

Si le nombre formé par les deux derniers chiffres d'un nombre entier est un multiple de 4, alors ce nombre est divisible par 4.

Les réciproques de toutes ces propriétés sont vraies.

**Exemple :**

Compléter chaque cas par *oui* ou par *non* :

| | 2 | 3 | 4 | 5 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 012 est divisible par | oui | non | oui | non | non | non |
| 3 165est divisible par | non | oui | non | oui | non | non |
| 4 230 est divisible par | oui | oui | non | oui | oui | oui |
| 7 250 est divisible par | oui | non | non | oui | non | oui |
| 9 547 est divisible par | non | non | non | non | non | non |

### 3) Nombres premiers :

**Définition :**

On dit qu'un nombre entier est premier s'il possède exactement deux diviseurs (1 et lui-même).

**Exemples :**

18 est divisible par 2, il possède donc au moins 3 diviseurs : 18 n'est donc pas premier.
23 possède exactement deux diviseurs (1 et 23) : 23 est donc premier.
1 possède un unique diviseur (lui-même) : 1 n'est donc pas premier.

On admet qu'il existe une infinité de nombres premiers.
Les dix premiers nombres premiers sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29.

## II) PGCD de deux nombres entiers :

### 1) Diviseurs communs à deux nombres entiers :

#### a) Définition :

Deux nombres entiers naturels $a$ et $b$ non nuls possèdent au moins un diviseur commun : c'est 1.
En outre, chacun des nombres $a$ et $b$ ayant un nombre fini de diviseurs, les nombres $a$ et $b$ possèdent donc un nombre fini de diviseurs communs.
Ainsi, deux nombres entiers naturels non nuls $a$ et $b$ possèdent nécessairement un plus grand diviseur commun (c'est éventuellement 1).

Le plus grand diviseur commun aux nombres $a$ et $b$ s'appelle succinctement le PGCD de $a$ et $b$ et se note $\mathrm{PGCD}(a;b)$.

#### b) Propriétés immédiates : (démonstrations à l'oral)

Pour tous nombres entiers naturels $a$ et $b$ non nuls :

$\mathrm{PGCD}(a;b)=\mathrm{PGCD}(b;a)$.   $\mathrm{PGCD}(a;a)=a$.   $\mathrm{PGCD}(a;1)=1$.

Si $b$ divise $a$, alors $\mathrm{PGCD}(a;b)=b$.

**Exemple :**

$\mathrm{PGCD}(16;48)=16$ car 16 divise 48 (puisque $48=16\times 3$ et 3 est un nombre entier).

### 2) Méthodes d'obtention du PGCD de deux nombres entiers naturels :

#### a) Liste (partielle) des diviseurs communs :

**Exemples :**

***** Déterminons le PGCD de 24 et 36 :

Diviseurs de 24 : 1 ; 2 ; …… ; 12 ; 24.
Diviseurs de 36 : 1 ; 2 ; 3 ; …… ; 12 ; 18 ; 36.
Donc : $\boxed{\mathrm{PGCD}(24;36)=12}$.

**** Déterminons le PGCD de 45 et 16 :**

Diviseurs de 45 : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45.
Diviseurs de 16 : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16.
Donc : $\boxed{\mathrm{PGCD}(45;16)=1.}$

## b) Algorithmes :

Un algorithme est un ensemble de règles dont l'application permet d'effectuer une tâche plus ou moins complexe.

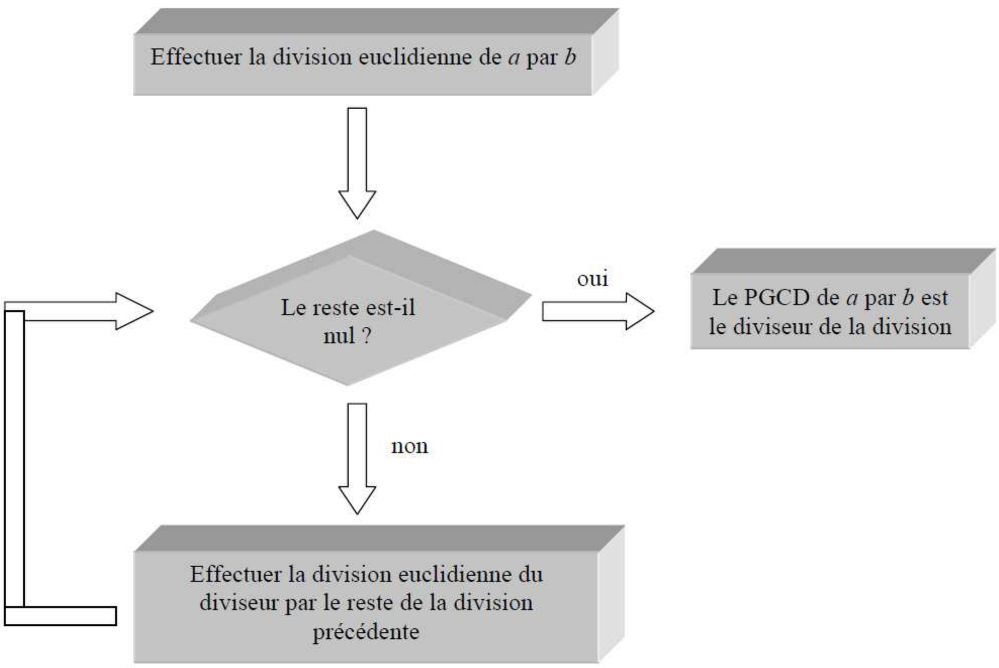
### * Algorithme des divisions ou algorithme d'Euclide :

C'est un algorithme itératif, c'est-à-dire dans lequel on répète plusieurs fois la même action, à savoir effectuer une division euclidienne.

Il repose sur la propriété suivante (admise) :

Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels non nuls.
Si on note respectivement $q$ et $r$ le quotient et le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$, alors on a :
$\mathrm{PGCD}(a;b)=\mathrm{PGCD}(b;r)$.

Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels non nuls tels que $a > b$.
Pour déterminer le plus grand diviseur commun de $a$ et $b$ :




On admet que nécessairement, après un certain nombre d'itérations, le reste est nul, et que par conséquent l'algorithme s'arrête.

Dans l'algorithme d'Euclide, le PGCD des nombres $a$ et $b$ est le diviseur de la division dont le reste est nul.

## Exemples :

a) Déterminons le PGCD de 4 284 et 6 001 en appliquant l'algorithme d'Euclide :

| Dividende | Diviseur | Reste |
|---|---|---|
| 6 001 | 4 284 | 1 717 |
| 4 284 | 1 717 | 850 |
| 1 717 | 850 | 17 |
| 850 | 17 | 0 |

Le PGCD est le diviseur de la division dont le reste est nul.
Donc : $\boxed{\text{PGCD}(4284;6001)=17}$.

b) Déterminons le PGCD de 121 et 85 en appliquant l'algorithme d'Euclide :

| Dividende | Diviseur | Reste |
|---|---|---|
| 121 | 85 | 36 |
| 85 | 36 | 13 |
| 36 | 13 | 10 |
| 13 | 10 | 3 |
| 10 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 0 |

Le PGCD est le diviseur de la division dont le reste est nul.
Donc : $\boxed{\text{PGCD}(121;85)=1}$.

## Remarque :

Cet algorithme se programme aisément sur tableur :

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Dividende | Diviseur | Reste |
| 2 | | | =MOD(A2;B2) |
| 3 | =B2 | =C2 | =MOD(A3;B3) |

Après avoir entré les nombres $a$ et $b$ dans les cellules A2 et B2, on sélectionne la ligne 3 et on l'étire vers le bas jusqu'à obtenir un reste nul.

**** Algorithme des soustractions :**

C'est un algorithme itératif qui consiste à effectuer des soustractions.

Il repose sur la propriété suivante (admise) :

Soients $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels non nuls avec $a > b$.
On a : $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b;a-b)$.

**Exemple :**

Déterminons le PGCD de 1 326 et 780 en appliquant l'algorithme des soustractions successives :

| $a$ | $b$ | $a-b$ |
|---|---|---|
| 1 326 | 780 | 546 |
| 780 | 546 | 234 |
| 546 | 234 | 312 |
| 312 | 234 | 78 |
| 234 | 78 | 156 |
| 156 | 78 | 78 |

Donc : $\boxed{\text{PGCD}(1326;780) = \text{PGCD}(78;78) = 78}$.

**Remarques :**

* On admet que nécessairement, après un certain nombre d'itérations, on obtient une différence $a-b$ égale à $b$, et que par conséquent l'algorithme s'arrête.

** Cet algorithme se programme aisément sur tableur :

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | $a$ | $b$ | $a-b$ |
| 2 | | | $=$A2$-$B2 |
| 3 | $=$MAX(B2 ;C2) | $=$MIN(B2 ;C2) | $=$A3$-$B3 |

Après avoir entré les nombres $a$ et $b$ dans les cellules A2 et B2, on sélectionne la ligne 3 et on l'étire vers le bas jusqu'à obtenir une différence $a-b$ égale à $b$.

## III) Applications :

### 1) Nombres premiers entre eux :

#### a) Définition :

On dit que deux nombres entiers naturels sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Autrement dit : Deux nombres entiers naturels sont premiers entre eux s'ils ne possèdent qu'un seul diviseur commun : 1.

### b) Exemples :

24 et 36 sont divisibles par 2, donc 24 et 36 ne sont pas premiers entre eux.
$\mathrm{PGCD}(45;16)=1$, donc 45 et 16 sont premiers entre eux.

### c) Remarque :

Pour démontrer que deux entiers naturels :
- ne sont pas premiers entre eux : il suffit de montrer qu'ils ont un diviseur commun distinct de 1 ;
- sont premiers entre eux : il faut démontrer que leur PGCD est égal à 1, en utilisant l'une des trois méthodes exposées dans le paragraphe **II.2**.

## 2) Irréductibilité d'une fraction :

### a) Définition :

On dit qu'une fraction est irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Autrement dit : Une fraction est irréductible si le PGCD de son numérateur et de son dénominateur est égal à 1.

Ainsi, une fraction irréductible ne peut être simplifiée (puisque son numérateur et son dénominateur n'ont pas d'autre diviseur commun que 1).

### b) Exemples :

24 et 36 ne sont pas premiers entre eux, donc la fraction $\frac{24}{36}$ n'est pas irréductible.

45 et 16 sont premiers entre eux, donc la fraction $\frac{45}{16}$ est irréductible

### c) Propriété : (admise)

Si on simplifie une fraction par le PGCD de son numérateur et de son dénominateur, alors on obtient une fraction irréductible.

**Exemple :**

Rendre irréductible la fraction $F=\frac{408}{578}$. Justifier.

Réponse :

Déterminons le PGCD de 408 et 578 en appliquant l'algorithme d'Euclide :

| Dividende | Diviseur | Reste |
|---|---|---|
| 578 | 408 | 170 |
| 408 | 170 | 68 |
| 170 | 68 | 34 |
| 68 | 34 | 0 |

Le PGCD est le diviseur de la division dont le reste est nul.
Donc : $\boxed{\mathrm{PGCD}(408;578)=34}$.

Si on simplifie une fraction par le PGCD de son numérateur et de son dénominateur, alors on obtient une fraction irréductible.

Donc : $F = \dfrac{408}{578} = \dfrac{\cancel{34} \times 12}{\cancel{34} \times 17} = \dfrac{12}{17}$ , et $\dfrac{12}{17}$ est irréductible.

### 3) Résolution d'un problème conduisant à la recherche d'un PGCD :

**Exemple :**

Un confiseur a un lot de 3 150 bonbons et 1 350 sucettes.
Il veut réaliser des paquets contenant tous le même nombre de bonbons et le même nombre de sucettes, en utilisant tous les bonbons et toutes les sucettes.
**1)** Combien de tels paquets pourra-t-il réaliser au maximum ?
**2)** Chaque bonbon sera vendu 5 centimes d'euro et chaque sucette 30 centimes d'euro.
Quel sera le prix d'un paquet ?

Réponse :

1) Nombre de paquets :

Puisque le confiseur doit utiliser ses 3 150 bonbons et ses 1 350 sucettes et que les paquets doivent contenir le même nombre de bonbons et le même nombre de sucettes, le nombre de paquets cherché doit diviser 3 150 et 1 350 : c'est donc un diviseur commun à 3 150 et 1 350.
Le nombre maximal de paquets que le confiseur peut ainsi réaliser est donc le plus grand diviseur commun à 3 150 et 1 350.
Déterminons le PGCD de 3 150 et 1 350 en appliquant l'algorithme d'Euclide :

| Dividende | Diviseur | Reste |
|---|---|---|
| 3 150 | 1 350 | 450 |
| 1 350 | 450 | 0 |

Le PGCD est le diviseur de la division dont le reste est nul.
Donc : $\boxed{\text{PGCD}(3150;1350) = 450}$.

Le confiseur pourra ainsi réaliser au maximum 40 paquets.

2) Prix d'un paquet :

$3150 \div 450 = 7$ et $1350 \div 450 = 3$.
Chaque paquet sera constitué de 7 bonbons et 3 sucettes.

$7 \times 0,05 + 3 \times 0,3 = 0,35 + 0,9 = 1,25$.
Chaque paquet sera donc vendu 1,25 €.