☺ **Exercice p 297, n° 42 :**

$SABCD$ est une pyramide dont la base est le rectangle $ABCD$. On place sur sa hauteur $[SA]$ le point A' tel que $SA' = 6\,\text{cm}$.

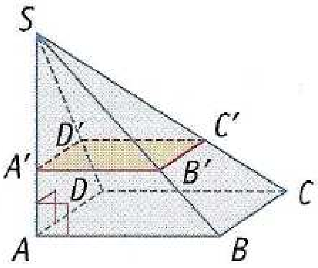
En coupant la pyramide $SABCD$ par un plan passant par le point A' et parallèle à sa base, on obtient une pyramide réduite $SA'B'C'D'$.

On donne :

$SA = 9$ cm ;

$AB = 8\,\text{cm}$;

$BC = 6\,\text{cm}$.



1) Calculer le rapport de réduction.

2) a) Calculer l'aire du rectangle $ABCD$.

b) En déduire l'aire du quadrilatère $A'B'C'D'$.

3) a) Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.

b) En déduire le volume de la pyramide $SA'B'C'D'$.

Correction :

1) Rapport de réduction :

$$k = \frac{SA'}{SA}$$

$$k = \frac{6}{9}$$

$$\boxed{k = \frac{2}{3}.}$$

2) a) Aire $\mathscr{A}$ du rectangle $ABCD$:

$$\mathscr{A} = AB \times BC$$

$$\mathscr{A} = 8 \times 6$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 48\ \text{cm}^2.}$$

L'aire du rectangle $ABCD$ mesure 48 cm².

b) Aire $\mathscr{A}'$ du quadrilatère $A'B'C'D'$:

Le quadrilatère $A'B'C'D'$ est la section de la pyramide $SABCD$ par le plan passant par A' et parallèle à sa base.
Or, la section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est un rectangle.

Donc le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un rectangle, réduction du rectangle $ABCD$ de rapport $k = \frac{2}{3}$.

Or, dans une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2.

D'où : $\mathscr{A}' = \mathscr{A} \times k^2$

$$\mathscr{A}' = 8 \times 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\mathscr{A}' = \frac{8 \times 2 \times \cancel{3} \times 4}{\cancel{3} \times 3}$$

$$\boxed{\mathscr{A}' = \frac{64}{3}\ \text{cm}^2}$$

$$\boxed{\mathscr{A}' \approx 21{,}33\ \text{cm}^2.}$$

L'aire du rectangle $A'B'C'D'$ mesure $\frac{64}{3}$ cm², soit environ 21,33 cm².

3) a) Volume $\mathscr{V}$ de la pyramide *SABCD* :

$$\mathscr{V} = \frac{AB \times BC \times SA}{3}$$
$$\mathscr{V} = \frac{8 \times 6 \times 9}{3}$$
$$\mathscr{V} = \frac{8 \times \cancel{3} \times 2 \times 9}{\cancel{3}}$$
$$\boxed{\mathscr{V} = 144 \text{ cm}^3.}$$

Le volume de la pyramide *SABCD* mesure 144 cm^3.

b) Volume $\mathscr{V}'$ de la pyramide $SA'B'C'D'$:

La pyramide $SA'B'C'D'$ est une réduction de la pyramide *SABCD* de rapport $k = \frac{2}{3}$.

Or, dans une réduction de rapport *k*, les volumes sont multipliées par k^3 .

D'où : $\mathscr{V}' = \mathscr{V} \times k^3$

$$\mathscr{V}' = 8 \times 2 \times 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$$
$$\mathscr{V}' = \frac{8 \times 2 \times \cancel{9} \times 8}{\cancel{9} \times 3}$$
$$\boxed{\mathscr{V}' = \frac{128}{3} \text{ cm}^3}$$
$$\boxed{\mathscr{V}' \approx 42,667 \text{ cm}^3.}$$

Le volume de la pyramide $SA'B'C'D'$ mesure $\frac{128}{3}$ cm^3, soit environ 42,667 cm^3.

☺ **Exercice p 297, n° 43 :**

En coupant un cône de révolution $(\mathscr{C})$ par un plan parallèle à sa base, on obtient un cône de révolution $(\mathscr{C}')$, réduction du cône $(\mathscr{C})$.

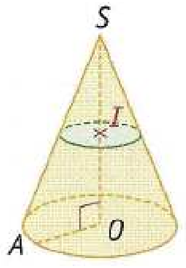
On donne :

$SO = 7$ cm ;

$SI = 4$ cm ;

$OA = 3$ cm.

Calculer le volume du cône $(\mathscr{C}')$.



Correction :

Le cône $(\mathscr{C}')$ est une réduction du cône $(\mathscr{C})$ de rapport $k=\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{4}{7}$.

Or, dans une réduction de rapport k, les volumes sont multipliées par k^3 .
Le volume $\mathscr{V}'$ du cône $(\mathscr{C}')$ s'obtient donc en multipliant le volume $\mathscr{V}$ du cône $(\mathscr{C})$ par k^3 .

$\mathscr{V}'=\mathscr{V}\times k^3$ avec $\mathscr{V}=\dfrac{\pi\times OA^2\times SO}{3}$

$$\mathscr{V}'=\frac{\pi\times 3^2\times 7}{3}\times\left(\frac{4}{7}\right)^3$$

$$\mathscr{V}'=\frac{\pi\times\cancel{3}\times 3\times\cancel{7}\times 4^3}{\cancel{3}\times\cancel{7}\times 7^2}$$

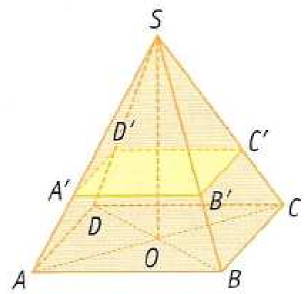
$$\boxed{\mathscr{V}'=\frac{192\pi}{49}\ \text{cm}^3}$$

$$\boxed{\mathscr{V}'\approx 12{,}310\ \text{cm}^3.}$$

Le volume du cône $(\mathscr{C}')$ mesure $\dfrac{192\pi}{49}$ cm^3, soit environ 12,310 cm^3.

☺ **Exercice p 300, n° 66 :**

SABCD est une pyramide régulière dont la base est un carré *ABCD* de centre *O*.
On donne :
$SA=12$ cm ;
$AB=6$ cm.



1) a) Calculer *SO* et l'exprimer sous la forme $a\sqrt{b}$ où *a* et *b* sont deux nombres entiers avec *b* le plus petit possible.
b) Calculer le volume de la pyramide *SABCD*.
2) On appelle A' le point du segment $[SA]$ tel que $SA'=9$ cm.
On coupe la pyramide par le plan qui passe par le point A' et qui est parallèle à sa base.
On obtient une petite pyramide réduite $SA'B'C'D'$, réduction de la pyramide *SABCD*.
Calculer le volume de la pyramide $SA'B'C'D'$.
3) Le solide $A'B'C'D'ABCD$ s'appelle un tronc de pyramide. Calculer le volume de ce solide.

Correction :

1) a) Longueur *SO* :

ABCD est un carré de centre *O*, donc le triangle *AOB* est rectangle et isocèle en *O*.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$AB^2=OA^2+OB^2$ avec $OA=OB$

donc $OA^2=\dfrac{AB^2}{2}$

$$OA^2=\frac{6^2}{2}$$

$$\boxed{OA^2=18.}$$

Dès lors, la pyramide $SABCD$ étant régulière, la droite (SO) est perpendiculaire au plan $(ABCD)$, donc le triangle SOA est rectangle en O, et d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$SA^2 = OS^2 + OA^2$$

donc $SO^2 = SA^2 - OA^2$

$$SO^2 = 12^2 - 18$$

$$SO^2 = 144 - 18$$

$$SO^2 = 126\,.$$

D'où : $SO = \sqrt{126}$

$$SO = \sqrt{9 \times 14}$$

$$\boxed{SO = 3\sqrt{14}\ \text{cm.}}$$

b) Volume $\mathscr{V}$ de la pyramide $SABCD$:

$$\mathscr{V} = \frac{AB^2 \times SO}{3}$$

$$\mathscr{V} = \frac{6^2 \times \cancel{3}\sqrt{14}}{\cancel{3}}$$

$$\boxed{\mathscr{V} = 36\sqrt{14}\ \text{cm}^3}$$

$$\boxed{\mathscr{V} \approx 134{,}700\ \text{cm}^3.}$$

Le volume de la pyramide $SABCD$ mesure $36\sqrt{14}$ cm^3, soit environ 134,700 cm^3.

2) Volume $\mathscr{V}'$ de la pyramide $SA'B'C'D'$:

La pyramide $SA'B'C'D'$ est une réduction de la pyramide $SABCD$ de rapport $k = \dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$.

Or, dans une réduction de rapport k, les volumes sont multipliées par k^3 .

D'où : $\mathscr{V}' = \mathscr{V} \times k^3$

$$\mathscr{V}' = 36\sqrt{14} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$\mathscr{V}' = \frac{\cancel{4} \times 9 \times \sqrt{14} \times 3^3}{\cancel{4} \times 4^2}$$

$$\boxed{\mathscr{V}' = \frac{243\sqrt{14}}{16}\ \text{cm}^3}$$

$$\boxed{\mathscr{V}' \approx 56{,}826\ \text{cm}^3.}$$

Le volume de la pyramide $SA'B'C'D'$ mesure $\dfrac{243\sqrt{14}}{16}$ cm^3, soit environ 56,826 cm^3.

3) Volume $\mathscr{V}''$ du tronc de pyramide $A'B'C'D'ABCD$:

$$\mathscr{V}'' = \mathscr{V} - \mathscr{V}'$$
$$\mathscr{V}'' = 36\sqrt{14} - \frac{243\sqrt{14}}{16}$$
$$\mathscr{V}'' = \left(4 - \frac{27}{16}\right) \times 9\sqrt{14}$$
$$\mathscr{V}'' = \left(\frac{64}{16} - \frac{27}{16}\right) \times 9\sqrt{14}$$
$$\mathscr{V}'' = \frac{37}{16} \times 9\sqrt{14}$$
$$\boxed{\mathscr{V}'' = \frac{333\sqrt{14}}{16}\ \text{cm}^3}$$
$$\boxed{\mathscr{V}'' \approx 77{,}873\ \text{cm}^3.}$$

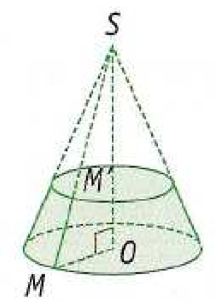
Le volume du tronc de pyramide mesure $\frac{333\sqrt{14}}{16}$ cm^3, soit environ 77,873 cm^3.

☺ **Exercice p 300, n° 67 :**

$(\mathscr{C})$ est un cône de révolution de sommet S et de base un disque de centre O et de rayon OM.

Le point M' appartient à la génératrice $[SM]$.

On coupe ce cône par un plan passant par le point M' et parallèle à sa base. On obtient alors un cône $(\mathscr{C}')$, réduction du cône $(\mathscr{C})$.



On donne :
$SM = 8$ cm ;
$SM' = 5$ cm ;
$OM = 3$ cm.

1) Calculer le volume du cône $(\mathscr{C})$.

2) Calculer le volume du cône $(\mathscr{C}')$.

3) Calculer le volume du tronc de cône vert.

Correction :

1) Volume $\mathscr{V}$ du cône $(\mathscr{C})$:

Dans le triangle SOM rectangle en O, on applique le théorème de Pythagore :

$$SM^2 = OS^2 + OM^2$$

donc $SO^2 = SM^2 - OM^2$

$$SO^2 = 8^2 - 3^2$$
$$SO^2 = 64 - 9$$
$$SO^2 = 55.$$

D'où : $\boxed{SO = \sqrt{55}\ \text{cm.}}$

Dès lors :

$$\mathcal{V} = \frac{\pi \times OM^2 \times SO}{3}$$
$$\mathcal{V} = \frac{\pi \times 3^2 \times \sqrt{55}}{3}$$
$$\boxed{\mathcal{V} = 3\pi\sqrt{55}\ \text{cm}^3}$$
$$\boxed{\mathcal{V} \approx 69{,}896\ \text{cm}^3.}$$

Le volume du cône mesure $3\pi\sqrt{55}$ cm^3, soit environ 69,896 cm^3.

2) Volume $\mathcal{V}'$ du cône $(\mathcal{C}')$:

Le cône $(\mathcal{C}')$ est une réduction du cône $(\mathcal{C})$ de rapport $k = \frac{SM'}{SM} = \frac{5}{8}$.

Or, dans une réduction de rapport *k*, les volumes sont multipliées par k^3 .

Le volume $\mathcal{V}'$ du cône $(\mathcal{C}')$ s'obtient donc en multipliant le volume $\mathcal{V}$ du cône $(\mathcal{C})$ par k^3 .

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} \times k^3$$
$$\mathcal{V}' = 3\pi\sqrt{55} \times \left(\frac{5}{8}\right)^3$$
$$\boxed{\mathcal{V}' = \frac{375\pi\sqrt{55}}{512}\ \text{cm}^3}$$
$$\boxed{\mathcal{V}' \approx 17{,}064\ \text{cm}^3.}$$

Le volume du cône $(\mathcal{C}')$ mesure $\frac{375\pi\sqrt{55}}{512}$ cm^3, soit environ 17,064 cm^3.

3) Volume $\mathcal{V}''$ du tronc de cône vert :

$$\mathcal{V}'' = \mathcal{V} - \mathcal{V}'$$
$$\mathcal{V}'' = 3\pi\sqrt{55} - \frac{375\pi\sqrt{55}}{512}$$
$$\mathcal{V}'' = \left(1 - \frac{125}{512}\right) \times 3\pi\sqrt{55}$$
$$\mathcal{V}'' = \left(\frac{512}{512} - \frac{125}{512}\right) \times 3\pi\sqrt{55}$$
$$\mathcal{V}'' = \frac{387}{512} \times 3\pi\sqrt{55}$$
$$\boxed{\mathcal{V}'' = \frac{1161\pi\sqrt{55}}{512}\ \text{cm}^3}$$
$$\boxed{\mathcal{V}'' \approx 52{,}832\ \text{cm}^3.}$$

Le volume du tronc de cône mesure $\frac{1161\pi\sqrt{55}}{512}$ cm^3, soit environ 52,832 cm^3.