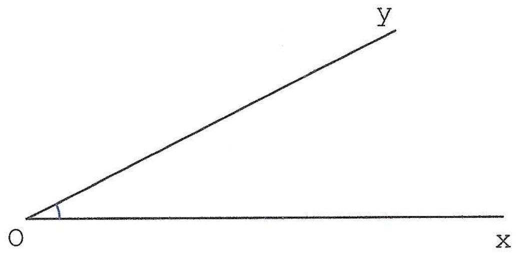
ANGLES ET CERCLE.

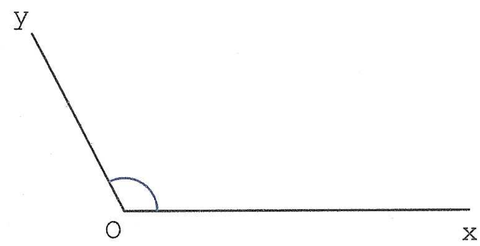
I) Vocabulaire :

1) Angle saillant, angle rentrant :

Nous avons appris en sixième qu'un angle est défini par deux demi-droites de même origine.



$\widehat{xOy}$ aigu



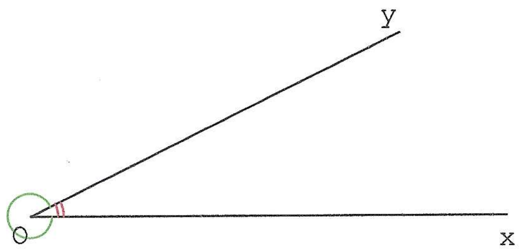
$\widehat{xOy}$ obtus

L'angle $\widehat{xOy}$ est déterminé par les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$.

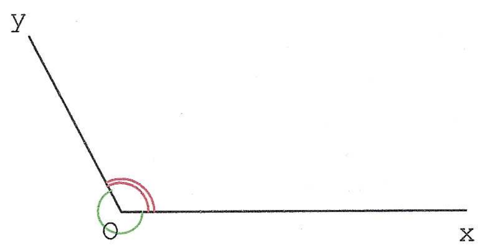
En fait, dans chaque cas, les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ définissent deux angles :

- l'angle saillant $\widehat{xOy}$, dont la mesure est comprise entre 0° et 180° ;
- l'angle rentrant $\widehat{xOy}$, dont la mesure est comprise entre 180° et 360°.

On a : $\widehat{xOy} + \widehat{xOy} = 360°$.



$\widehat{xOy}$ aigu

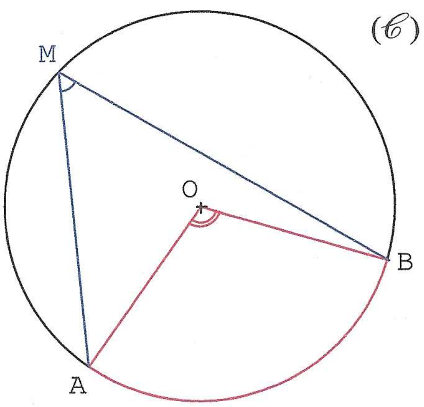


$\widehat{xOy}$ obtus

2) Angle inscrit, angle au centre :

Soient $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O, et A, B et M trois points du cercle $(\mathscr{C})$.

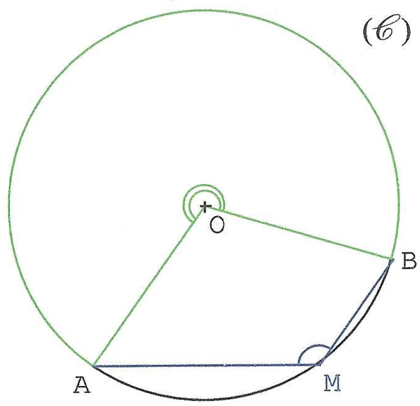
figure 1



$\widehat{AMB}$ aigu

ou

figure 2



$\widehat{AMB}$ obtus

a) Angle inscrit :

On dit que l'angle $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$.

Figure 1 : On dit que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte le petit arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$.
Figure 2 : On dit que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte le grand arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$.

b) Angle au centre :

On dit que les angles saillant $\widehat{AOB}$ et rentrant $\widecheck{AOB}$ sont des angles au centre du cercle $(\mathscr{C})$.

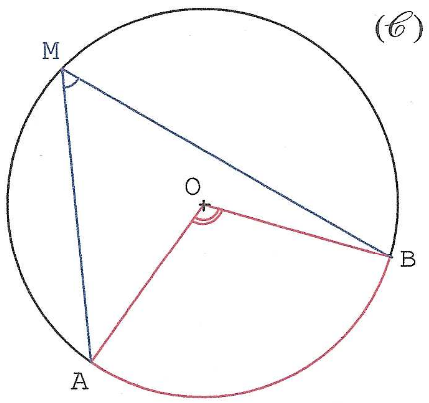
Figure 1 : Quand l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est aigu, l'angle au centre saillant $\widehat{AOB}$ intercepte le même arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$: c'est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.
Figure 2 : Quand l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est obtus, l'angle au centre rentrant $\widecheck{AOB}$ intercepte le même arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$: c'est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.

II) Le théorème de l'angle inscrit :

1) Problème :

Soient $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O, A et B deux points du cercle $(\mathscr{C})$ non diamétralement opposés, et M un point du cercle $(\mathscr{C})$ distinct des points A et B.
Comment varie la mesure de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ quand le point M parcourt le cercle $(\mathscr{C})$?

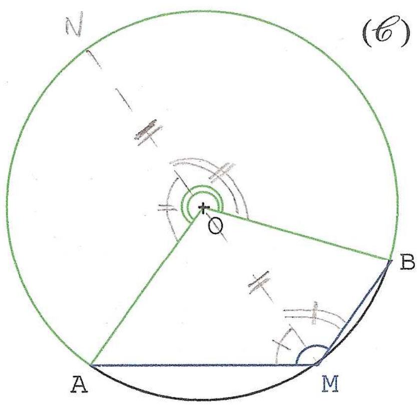
figure 1



$\widehat{AMB}$ aigu

ou

figure 2



$\widehat{AMB}$ obtus

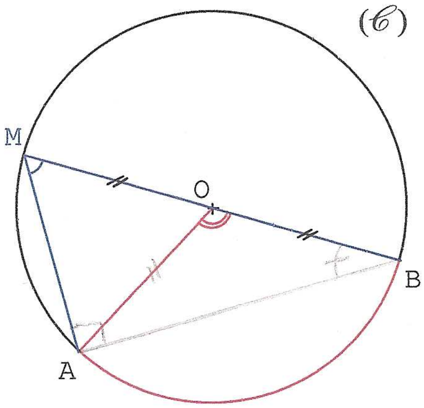
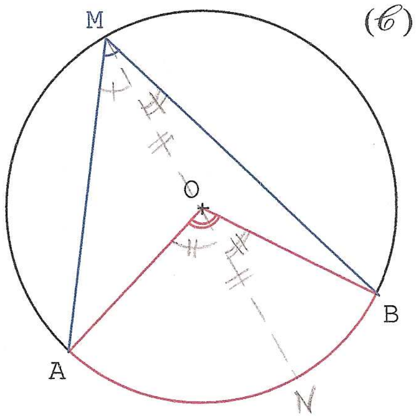
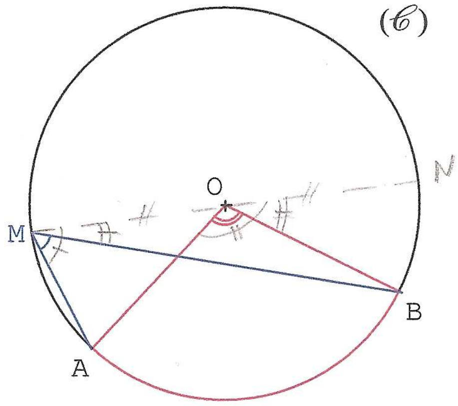
→ Réponse :

Nous avons conjecturé avec Géoplan que, lorsque le point M parcourt le cercle $(\mathscr{C})$, la mesure de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est constante sur chacun des deux arcs de cercle d'extrémités A et B, mais pas sur le cercle $(\mathscr{C})$: elle dépend donc de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ auquel appartient le point M, donc de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte, et est égale à la moitié de celle de l'angle au centre associé.

Démontrons-le !

Cas où l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est aigu (figure 1) :

On distingue trois cas suivant la position de O par rapport au secteur angulaire défini par l'angle $\widehat{AMB}$:

1er cas	2ème cas	3ème cas
		
O appartient à l'un des côtés de l'angle $\widehat{AMB}$	O est à l'intérieur du secteur angulaire	O est à l'extérieur du secteur angulaire

1er cas :

Le triangle ABM est inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$ et le côté $[BM]$ est un diamètre du cercle $(\mathscr{C})$: il est donc rectangle en A.

Donc les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ABM}$ sont complémentaires.

D'où : $\boxed{\widehat{AMB} = 90 - \widehat{ABM}.}$ (*)

Par ailleurs, $OA = OB$, donc le triangle AOB est isocèle en O ; ses angles à la base $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OBA}$ ont donc même mesure. La somme des mesures des angles du triangle AOB étant égale à 180°, on a alors :
$\widehat{AOB} = 180 - 2\times\widehat{ABM}$.

Donc : $\widehat{AOB} = 2\times\left(90 - \widehat{ABM}\right)$ d'après (*)

donc $\widehat{AOB} = 2\times\widehat{AMB}$

donc $\boxed{\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}.}$

2ème et 3ème cas :

Soit N le symétrique de M par rapport à O.

Alors, d'après le 1er cas : $\widehat{AMN} = \dfrac{1}{2}\widehat{AON}$ et $\widehat{BMN} = \dfrac{1}{2}\widehat{BON}$.

D'où :

2ème cas

$$\widehat{AMB} = \widehat{AMN} + \widehat{BMN}$$
$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AON} + \frac{1}{2}\widehat{BON}$$
$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{AON} + \widehat{BON}\right)$$
$$\boxed{\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.}$$

3ème cas

$$\widehat{AMB} = \widehat{AMN} - \widehat{BMN}$$
$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AON} - \frac{1}{2}\widehat{BON}$$
$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{AON} - \widehat{BON}\right)$$
$$\boxed{\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.}$$

Cas où l'angle $\widehat{AMB}$ est obtus (figure 2) :

Soit N le symétrique de M par rapport à O.
L'angle inscrit $\widehat{AMN}$ (qui est aigu) intercepte le même arc $\overset{\frown}{AN}$ que l'angle au centre $\widehat{AON}$, et l'angle inscrit $\widehat{BMN}$ (qui est aigu) intercepte le même arc $\overset{\frown}{BN}$ que l'angle au centre $\widehat{BON}$.
Donc, d'après ce qui précède : $\widehat{AMN} = \frac{1}{2}\widehat{AON}$ et $\widehat{BMN} = \frac{1}{2}\widehat{BON}$.

Doù : $\widehat{AMB} = \widehat{AMN} + \widehat{BMN}$

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AON} + \frac{1}{2}\widehat{BON}$$

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{AON} + \widehat{BON}\right)$$

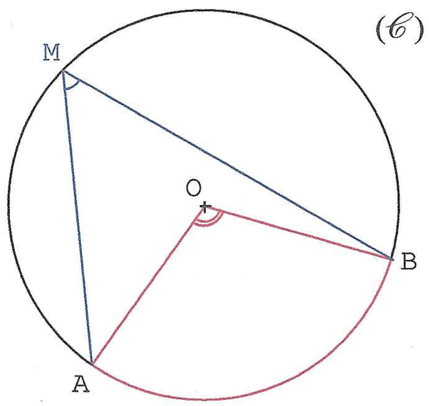
$$\boxed{\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.}$$

2) Enoncé du théorème :

On retiendra le théorème suivant, appelé théorème de l'angle inscrit.

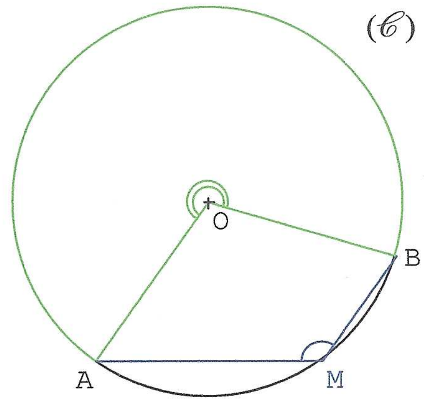
Dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de celle de l'angle au centre associé.

$\widehat{AMB}$ aigu



ou

$\widehat{AMB}$ obtus



L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte le même arc $\overset{\frown}{AB}$ que l'angle au centre saillant $\widehat{AOB}$, donc :

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.$$

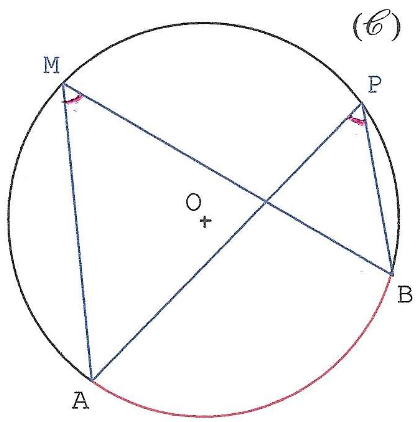
L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte le même arc $\overset{\frown}{AB}$ que l'angle au centre rentrant $\widehat{AOB}$, donc :

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.$$

3) Conséquence :

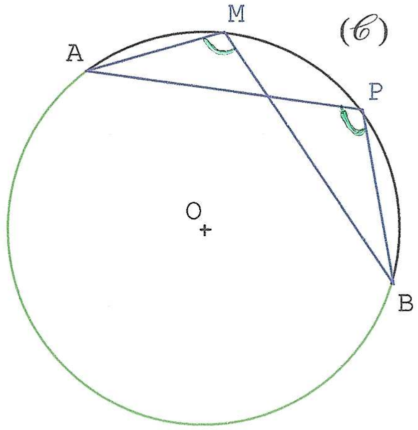
Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.

$\widehat{AMB}$ aigu



ou

$\widehat{AMB}$ obtus



Les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{APB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$, donc : $\widehat{AMB} = \widehat{APB}$.

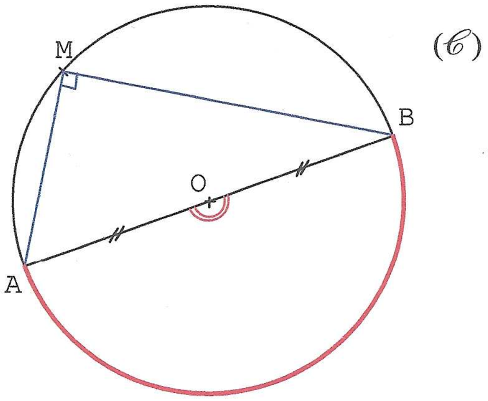
Les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{APB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$, donc : $\widehat{AMB} = \widehat{APB}$.

En effet :

Dans chaque cas, puisque les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{APB}$ interceptent le même arc, ils ont le même angle au centre associé. D'après le théorème de l'angle inscrit, ils mesurent donc chacun la moitié de cet angle au centre et ont donc la même mesure.

4) Remarque :

Si les points A et B sont diamétralement opposés :



Alors l'angle au centre $\widehat{AOB}$ mesure 180°.

Le triangle ABM étant inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$, il est rectangle en M, donc $\widehat{AMB} = 90°$.

On a alors $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

La propriété vue en $4^{\text{ème}}$ est donc un cas particulier du théorème de l'angle inscrit.

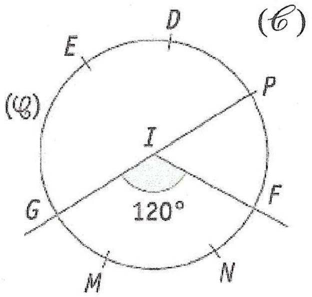
5) Utilité :

- Le théorème de l'angle inscrit permet de calculer la mesure d'un angle ;
- Sa conséquence permet de démontrer que deux angles ont la même mesure.

Exemple :

On considère la figure ci-dessous dans laquelle :

- les points D, E, F, G, M, N et P appartiennent au cercle $(\mathscr{C})$ de centre I ;
- le segment $[GP]$ est un diamètre du cercle $(\mathscr{C})$.



1) Quelle est la nature du triangle DGP ? Justifier.

2) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{GEF}$. Justifier.

3) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{GMF}$. Justifier.

4) Justifier les angles $\widehat{DME}$ et $\widehat{DNE}$ ont la même mesure.

→ Réponse :

1) Nature du triangle DGP :

Le triangle DGP est inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$ et le côté $[GP]$ est un diamètre du cercle $(\mathscr{C})$.
Or, si un triangle est inscrit dans un cercle et qu'un côté du triangle est un diamètre du cercle, alors ce triangle est rectangle.
Donc le triangle DGP est rectangle en D.

2) Mesure de l'angle $\widehat{GEF}$:

Dans le cercle $(\mathscr{C})$, l'angle saillant $\widehat{GIF}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{GEF}$.

Donc, d'après le théorème de l'angle inscrit :

$$\widehat{GEF} = \frac{1}{2}\widehat{GIF}$$
$$\widehat{GEF} = \frac{1}{2}\times 120$$
$$\boxed{\widehat{GEF} = 60°.}$$

L'angle $\widehat{GEF}$ mesure donc 60°.

3) Mesure de l'angle $\widehat{GMF}$:

Dans le cercle $(\mathscr{C})$, l'angle rentrant $\overset{\vee}{GIF}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{GMF}$.

Donc, d'après le théorème de l'angle inscrit :

$$\widehat{GMF} = \frac{1}{2}\overset{\vee}{GIF}$$
$$\widehat{GMF} = \frac{1}{2}\times(360-120)$$
$$\widehat{GMF} = \frac{1}{2}\times 240$$
$$\boxed{\widehat{GMF} = 120°.}$$

L'angle $\widehat{GMF}$ mesure donc 120°.

4) Dans le cercle $(\mathscr{C})$, les angles inscrits $\widehat{DME}$ et $\widehat{DNE}$ interceptent le même arc $\widehat{DE}$.
Or, dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.
Donc les angles $\widehat{DME}$ et $\widehat{DNE}$ ont la même mesure.