☺ **Exercice 1 :**

On donne le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 3.
- Multiplier cette somme par 4.
- Enlever 12 au résultat obtenu.

1) Montrer que si le nombre choisi au départ est 2, on obtient comme résultat 8.
2) Calculer la valeur exacte du résultat obtenu lorsque :
a) Le nombre choisi est -5 ;
b) Le nombre choisi est $\frac{2}{3}$.
3) a) A votre avis, comment peut-on passer, en une seule étape, du nombre choisi au départ au résultat final ?
b) Démontrer votre réponse.
Dans cette question, toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation.

Correction :

1) Si on choisit 2 :

- 2
- $2+3=5$
- $5\times 4=20$
- $20-12=8$.

Si le nombre choisi au départ est 2, alors on obtient comme résultat 8.

2) a) Si on choisit -5 :

- -5
- $-5+3=-2$
- $(-2)\times 4=-8$
- $-8-12=-20$.

Si le nombre choisi au départ est -5, alors on obtient comme résultat -20.

2) b) Si on choisit $\frac{2}{3}$:

- $\frac{2}{3}$
- $\frac{2}{3}+3=\frac{2}{3}+\frac{9}{3}=\frac{11}{3}$
- $\frac{11}{3}\times 4=\frac{44}{3}$
- $\frac{44}{3}-12=\frac{44}{3}-\frac{36}{3}=\frac{8}{3}$.

Si le nombre choisi au départ est $\frac{2}{3}$, alors on obtient comme résultat $\frac{8}{3}$.

3) a) Conjecture :

$8 = 2\times4$; $-20 = (-5)\times4$; $\frac{8}{3} = \frac{2}{3}\times4$.

Il semblerait que le résultat du programme de calcul s'obtienne en prenant le quadruple du nombre choisi au départ.

b) Démonstration de la conjecture :

Soit x le nombre choisi au départ.

- x
- $x+3$
- $4(x+3)$
- $R = 4(x+3)-12$.

$R = 4(x+3)-12$

$R = 4x + \cancel{12} - \cancel{12}$

$\boxed{R = 4x}$.

Si le nombre choisi au départ est x, alors on obtient comme résultat $4x$, c'est-à-dire le quadruple du nombre choisi au départ : la conjecture est donc vraie.

☺ **Exercice 2 :**

On propose le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Soustraire 6.
- Calculer le carré du résultat obtenu.

1) On choisit le nombre -4 au départ, montrer que le résultat obtenu est 100.
2) On choisit 15 comme nombre de départ, quel est le résultat obtenu ?
3) Quel nombre pourrait-on choisir pour que le résultat du programme soit le nombre 144 ? Justifier la réponse.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Correction :

1) Si on choisit -4 :

- -4
- $-4-6=-10$
- $(-10)^2 = 100$.

Si le nombre choisi au départ est -4, alors le résultat obtenu est 100.

2) Si on choisit 15 :

- 15
- $15-6=9$
- $9^2=81$.

Si le nombre choisi au départ est 15, alors le résultat obtenu est 81.

3) On remonte le programme de calcul :

- 144
- $\sqrt{144}=12$
- $12+6=18$.

Pour que le résultat du programme de calcul soit 144, on pourrait choisir au départ le nombre 18.

Remarque :

On pourrait choisir aussi le nombre -6.
En effet :

- -6
- $-6-6=-12$
- $(-12)^2=144$.

☺ **Exercice 3 :**

On considère les programmes de calcul suivants :

Programme A	**Programme B**
• Choisir un nombre. • Lui ajouter 1. • Calculer le carré de la somme obtenue. • Soustraire au résultat le carré du nombre de départ.	• Choisir un nombre. • Ajouter 1 au double de ce nombre.

1) On choisit 5 comme nombre de départ.
Quel résultat obtient-on avec chacun de ces deux programmes ?
2) Démontrer que, quel que soit le nombre choisi, les résultats obtenus avec les deux programmes sont toujours égaux.
Pour cette question, vous laisserez apparentes toutes vos recherches. Même si le travail n'est pas terminé, il en sera tenu compte dans la notation.

Correction :

1) Si on choisit 5 :

Programme A :

- 5
- $5+1=6$
- $6^2=36$
- $36-5^2=36-25=11$.

Programme B :

- 5
- $2\times 5+1=10+1=11$.

Si le nombre choisi au départ est 5, alors le résultat obtenu avec les programmes A et B est 11.

2) Soit x le nombre choisi au départ.

Programme A :

- x
- $x+1$
- $(x+1)^2$
- $A=(x+1)^2-x^2$.

Programme B :

- x
- $\boxed{B=2x+1.}$

$A=(x+1)^2-x^2$

$A=\cancel{x^2}+2x+1-\cancel{x^2}$

$\boxed{A=2x+1.}$

Si le nombre choisi au départ est x, alors le résultat obtenu avec les programmes A et B est $2x+1$.
Donc, quel que soit le nombre choisi au départ, les résultats obtenus avec les deux programmes sont toujours égaux.

☺ **Exercice 4 :**

Tous les calculs et toute trace de recherche, même incomplète, seront pris en compte dans l'évaluation.

Marc et Sophie se lancent des défis mathématiques. C'est au tour de Marc, il propose un programme de calcul à sa camarade :

- Choisir un nombre entier positif ;
- Elever ce nombre au carré ;
- Ajouter 3 au résultat obtenu ;
- Puis, multiplier par 2 le résultat obtenu ;
- Soustraire 6 au résultat précédent ;
- Enfin, prendre la moitié du dernier résultat ;
- Ecrire le résultat final.

1) Tester ce programme de calcul en choisissant comme nombre de départ 3, puis 10.
2) Marc prétend être capable de trouver rapidement le nombre de départ connaissant le résultat final.
Sophie choisit alors au hasard un nombre et applique le programme de calcul. Elle annonce à Marc le résultat final 81. Celui-ci répond qu'elle avait choisi le nombre 9 au départ. Stupéfaite, Sophie lui dit : « Tu es un magicien ! »
a) Vérifier le calcul en commençant le programme avec le nombre 9.
b) Et si le résultat du programme était 36, pourriez-vous dire le nombre choisi par Sophie ?
3) A votre avis, comment peut-on passer, en une seule étape, du nombre choisi au départ au résultat final ? Démontrer la réponse.

Correction :

1) Si on choisit 3 :

- 3
- $3^2 = 9$
- $9 + 3 = 12$
- $12 \times 2 = 24$
- $24 - 6 = 18$
- $18 \times \frac{1}{2} = 9$
- 9.

Si le nombre choisi au départ est 3, alors le résultat obtenu est 9.

Si on choisit 10 :

- 10
- $10^2 = 100$
- $100 + 3 = 103$
- $103 \times 2 = 206$
- $206 - 6 = 200$
- $200 \times \frac{1}{2} = 100$
- 100.

Si le nombre choisi au départ est 10, alors le résultat obtenu est 100.

2) a) Si on choisit 9 :

- 9
- $9^2 = 81$
- $81 + 3 = 84$
- $84 \times 2 = 168$
- $168 - 6 = 162$
- $162 \times \frac{1}{2} = 81$
- 81.

Si le nombre choisi au départ est 9, alors le résultat obtenu est 81.

b) Si le résultat du programme de calcul est 36, alors le nombre choisi par Sophie est 6.
En effet :

- 6
- $6^2 = 36$
- $36 + 3 = 39$
- $39 \times 2 = 78$
- $78 - 6 = 72$
- $72 \times \frac{1}{2} = 36$
- 36.

3) Conjecture :

$9 = 3^2$; $100 = 10^2$; $81 = 9^2$; $36 = 6^2$.
Il semblerait que le résultat du programme de calcul soit le carré du nombre choisi au départ.

Démonstration de la conjecture :

Soit x le nombre choisi au départ.

- x
- x^2
- $x^2 + 3$
- $2(x^2 + 3)$
- $2(x^2 + 3) - 6$
- $R = \frac{1}{2}\left[2(x^2 + 3) - 6\right]$.

$$R = \frac{1}{2}\left[2(x^2 + 3) - 6\right]$$
$$R = \frac{1}{2}\left[2x^2 + \cancel{6} - \cancel{6}\right]$$
$$R = \frac{1}{2} \times 2x^2$$
$$\boxed{R = x^2.}$$

Si le nombre choisi au départ est x, alors on obtient comme résultat x^2, c'est-à-dire le carré du nombre choisi au départ : la conjecture est donc vraie.

☺ **Exercice 5 :**

On considère le programme de calcul ci-dessous :

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 3.
- Calculer le carré du résultat obtenu.
- Lui soustraire le carré du nombre choisi.
- Ecrire le résultat.

1) Ecrire les calculs permettant de vérifier que si on choisit le nombre 5, alors on obtient 39.
2) Quel résultat obtient-on si on choisit : **a)** -1 ? **b)** -4 ? (faire apparaître les calculs sur la copie)
3) Démontrer que si le nombre choisi est x, alors le résultat obtenu est $6x+9$.
4) Quel nombre faut-il choisir au départ pour obtenir un résultat final égal à 111 ? Justifier la réponse.

Correction :

1) Si on choisit 5 :

- 5
- $5+3=8$
- $8^2=64$
- $64-5^2=64-25=39$
- 39.

Si le nombre choisi au départ est 5, alors le résultat obtenu est 39.

2) a) Si on choisit -1 :

- -1
- $-1+3=2$
- $2^2=4$
- $4-(-1)^2=4-1=3$
- 3.

Si le nombre choisi au départ est -1, alors le résultat obtenu est 3.

b) Si on choisit -4 :

- -4
- $-4+3=-1$
- $(-1)^2=1$
- $1-(-4)^2=1-16=-15$
- -15.

Si le nombre choisi au départ est -4, alors le résultat obtenu est -15.

3) Soit x le nombre choisi au départ.

- x
- $x+3$
- $(x+3)^2$
- $R=(x+3)^2-x^2$.

$R=(x+3)^2-x^2$

$R=\cancel{x^2}+6x+9-\cancel{x^2}$

$\boxed{R=6x+9.}$

Si le nombre choisi au départ est x, alors on obtient comme résultat $6x+9$.

4) D'après la question précédente, le résultat du programme de calcul s'obtient en multipliant par 6 le nombre choisi au départ, puis en ajoutant 9 au résultat obtenu.
On peut donc remonter ce programme de calcul :

- 111
- $111-9=102$
- $102\div 6=17$.

Pour obtenir un résultat final égal à 111, il faut donc choisir 17 comme nombre au départ.