Correction du Brevet blanc n° 2.

Exercice 1 :

1) a) Calculer le nombre : $A=\dfrac{8+3\times 4}{1+2\times 1,5}$.

b) Pour calculer le nombre *A*, un élève a tapé sur sa calculatrice la succession de touches ci-dessous :

$\boxed{8}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{.}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$

Expliquer pourquoi il n'obtient pas le bon résultat.

2) L'affirmation « Pour tout nombre *a* : $(2a+3)^2=4a^2+9$ » est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

3) Résoudre l'équation $(5-x)(3x+2)=0$.

4) En détaillant les étapes, calculer : $B=\dfrac{2\times\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}+2}$. Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Correction :

1) a) $A=\dfrac{8+3\times 4}{1+2\times 1,5}$

$A=\dfrac{8+12}{1+3}$

$A=\dfrac{20}{4}$

$\boxed{A=5.}$

b) L'élève n'obtient pas le bon résultat car il est nécessaire de placer des parenthèses comme indiqué ci-dessous afin de respecter les priorités opératoires :

$\boxed{(}\ \boxed{8}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{)}\ \boxed{\div}\ \boxed{(}\ \boxed{1}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{.}\ \boxed{5}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$

2) Si $a=1$, alors : $(2a+3)^2=(2\times 1+3)^2=(2+3)^2=5^2=25$

tandis que $4a^2+9=4\times 1^2+9=4\times 1+9=4+9=13$.

Ce contre-exemple prouve que l'affirmation « Pour tout nombre *a* : $(2a+3)^2=4a^2+9$ » est fausse.

3) $(5-x)(3x+2)=0$.

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

L'équation équivaut donc à :

$5-x=0$ ou $3x+2=0$

$\boxed{x=5}$ $\qquad 3x=-2$

$\boxed{x=-\dfrac{2}{3}.}$

L'équation admet exactement deux solutions : ce sont $-\dfrac{2}{3}$ et 5.

4) $B=\dfrac{2\times\dfrac{5}{6}}{\dfrac{1}{3}+2}$

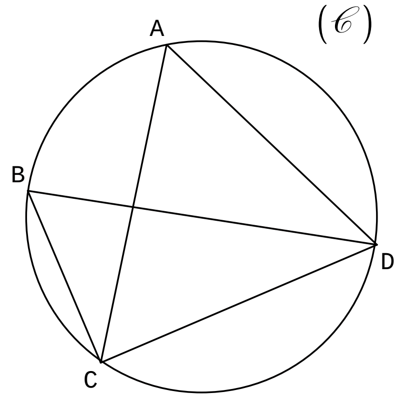
$B=\dfrac{\dfrac{\cancel{2}\times 5}{\cancel{2}\times 3}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{6}{3}}$

$B=\dfrac{\left(\dfrac{5}{3}\right)}{\left(\dfrac{7}{3}\right)}$

$B=\dfrac{5\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times 7}$

$\boxed{B=\dfrac{5}{7}.}$

Exercice 2 :



La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.
A, B, C et D sont quatre points d'un cercle $(\mathscr{C})$ tels que :

$\widehat{CAD}=58°$, $\widehat{BDC}=32°$ et $CD=4\,\text{cm}$.
1) Démontrer que le triangle BCD est rectangle en C.
2) En déduire la longueur BC arrondie au millimètre.

Correction :

1) Nature du triangle BCD :

Dans le cercle $(\mathscr{C})$, les angles inscrits $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CBD}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{CD}$.
Or, dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.
Donc l'angle $\widehat{CBD}$ a la même mesure que $\widehat{CAD}$, soit 58°.

Dès lors :

$\widehat{CBD}+\widehat{BDC}=58+32=90°$: les angles $\widehat{CBD}$ et $\widehat{BDC}$ du triangle BCD sont donc complémentaires.
Or, si un triangle possède deux angles complémentaires, alors il est rectangle.
On en déduit que le triangle BCD est rectangle en C.

2) Longueur BC :

Dans le triangle BCD rectangle en C, on a : $\tan\left(\widehat{BDC}\right)=\dfrac{BC}{CD}$

soit $\tan(32)=\dfrac{BC}{4}$

donc $BC=4\times\tan(32)$

$\boxed{BC\approx 2{,}5\,\text{cm}.}$

Le segment $[BC]$ mesure donc environ 2,5 cm.

Exercice 3 :

On donne le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Ajouter 1 au nombre choisi.
- Calculer le carré du résultat obtenu.
- Soustraire le carré du nombre choisi.
- Soustraire 1.

1) a) Effectuer ce programme lorsque le nombre choisi est 10 et montrer qu'on obtient 20.
b) Effectuer ce programme lorsque le nombre choisi est -3 et montrer qu'on obtient -6.
c) Effectuer ce programme lorsque le nombre choisi est 1,5.
2) Quelle conjecture peut-on faire à propos du résultat fourni par ce programme de calcul ? Démontrer cette conjecture.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Correction :

1) a) Si on choisit 10 :

- 10
- $10+1=11$
- $11^2=121$
- $121-10^2=121-100=21$
- $21-1=20$.

Donc, si l'on applique ce programme avec le nombre 10, alors on obtient 20.

b) Si on choisit -3 :

- -3
- $-3+1=-2$
- $(-2)^2=4$
- $4-(-3)^2=4-9=-5$
- $-5-1=-6$.

Donc, si l'on applique ce programme avec le nombre -3, alors on obtient -6.

c) Si on choisit 1,5 :

- $1,5$
- $1,5+1=2,5$
- $2,5^2=6,25$
- $6,25-1,5^2=6,25-2,25=4$
- $4-1=3$.

Donc, si l'on applique ce programme avec le nombre 1,5, alors on obtient 3.

2) Conjecture :

$20 = 2\times10$; $-6 = 2\times(-3)$; $3 = 2\times1,5$.

Il semblerait que le résultat du programme de calcul soit le double du nombre choisi au départ.

Démonstration de la conjecture :

Notons x le nombre choisi au départ.

- x
- $x+1$
- $(x+1)^2$
- $(x+1)^2 - x^2$
- $\boxed{(x+1)^2 - x^2 - 1}$.

$R = (x+1)^2 - x^2 - 1$

$R = \cancel{x^2} + 2x + \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{1}$

$\boxed{R = 2x.}$

Donc, si on note x le nombre choisi au départ, alors on obtient $2x$.
La conjecture est donc vraie : le résultat du programme de calcul est le double du nombre choisi au départ.

Exercice 4 :

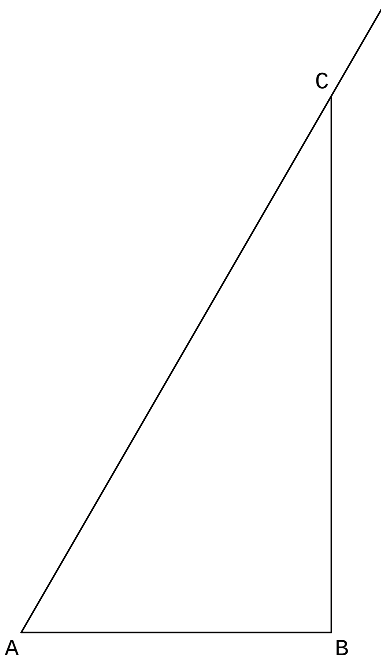
La formule d'Al-Kashi permet de calculer le troisième côté d'un triangle connaissant deux côtés et un angle. Pour un triangle ABC quelconque, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

On considère pour tout l'exercice que : $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 12\,\text{cm}$ et $\widehat{BAC} = 60°$.

1) Construire un triangle ABC vérifiant les conditions précédentes.
2) En utilisant la formule d'Al-Kashi, démontrer que : $BC = \sqrt{108}$ cm.
3) En déduire que le triangle ABC est rectangle en B.

Correction :

1) Figure :



2) Longueur BC :

D'après la formule d'Al-Kashi, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$$
$$BC^2 = 6^2 + 12^2 - 2\times 6\times 12\times\cos(60)$$
$$BC^2 = 36 + 144 - 2\times 6\times 12\times 0,5$$
$$BC^2 = 180 - 72$$
$$BC^2 = 108.$$

D'où : $\boxed{BC = \sqrt{108}\text{ cm.}}$

3) Nature du triangle ABC :

$[AC]$ est le plus grand côté du triangle ABC.

On a : $AC^2 = 144$.

Par ailleurs : $BA^2 + BC^2 = 36 + 108 = 144$.

On constate que $AC^2 = BA^2 + BC^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

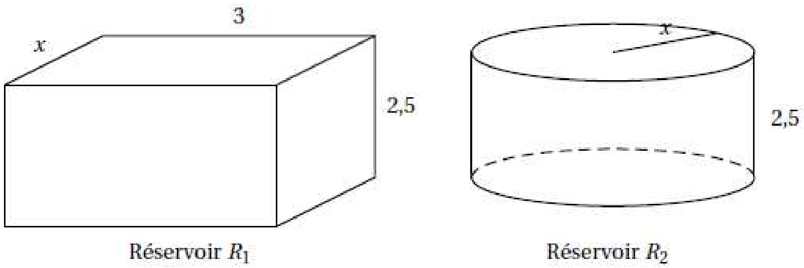
Exercice 5 :

De façon à récupérer l'eau de pluie de son toit, Lucas décide d'installer un récupérateur d'eau dans le sol de son jardin. La profondeur dont il dispose est de 2,5 m.

Un fabriquant lui propose alors les deux modèles de réservoirs schématisés ci-après.

Les dimensions sont en mètres.

Le premier modèle a la forme d'un pavé droit, le deuxième est cylindrique : dans chaque cas, la longueur x peut varier entre 0,5 m et 1,5 m.



1) Compléter le tableau fourni sur la ***feuille annexe***. *Les détails des calculs des valeurs exactes devront figurer sur votre copie.*

2) a) Montrer que l'expression, en fonction de x, du volume du réservoir R_1, est : $7,5x$.

b) Montrer que l'expression, en fonction de x, du volume du réservoir R_2, est : $2,5\pi x^2$.

3) On considère la fonction $f_1 : x \mapsto 7,5x$. Préciser la nature de cette fonction.

4) Pour les valeurs de x comprises entre 0,5 et 1,5, la fonction $f_2 : x \mapsto 2,5\pi x^2$ est déjà représentée sur la graphique fourni sur la ***feuille annexe***.

Sur ce même graphique, représenter la fonction f_1.

5) Répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique.

On répondra par des valeurs approchées et on fera apparaître les traits de construction permettant la lecture graphique.

a) Quel est le volume du réservoir R_2 pour $x = 0,8\,\text{m}$?

b) Quel doit être le rayon du réservoir R_2 pour qu'il ait une contenance de 10 m^3 ?

c) Quel est l'antécédent de 9 par la fonction f_1 ? Interpréter concrètement ce nombre.

d) Pour quelle valeur de x les volumes des deux réservoirs sont-ils égaux ?

e) Pour quelles valeurs de x le volume de R_1 est-il supérieur à celui de R_2 ?

Correction :

1) Pour $x=0,5$: / Pour $x=1,2$:

Réservoir R_1 :

Pour $x=0,5$: $\mathcal{V}_1=3\times2,5\times0,5$; $\boxed{\mathcal{V}_1=3,75\text{ m}^3.}$

Pour $x=1,2$: $\mathcal{V}_1=3\times2,5\times1,2$; $\boxed{\mathcal{V}_1=9\text{ m}^3.}$

Réservoir R_2 :

Pour $x=0,5$: $\mathcal{V}_2=\pi\times0,5^2\times2,5$; $\mathcal{V}_2=\pi\times0,25\times2,5$; $\boxed{\mathcal{V}_2=0,625\pi\text{ m}^3}$; $\boxed{\mathcal{V}_2\approx2,0\text{ m}^3.}$

Pour $x=1,2$: $\mathcal{V}_2=\pi\times1,2^2\times2,5$; $\mathcal{V}_2=\pi\times1,44\times2,5$; $\boxed{\mathcal{V}_2=3,6\pi\text{ m}^3}$; $\boxed{\mathcal{V}_2\approx11,3\text{ m}^3.}$

2) a) Volume du réservoir R_1 :

$\mathcal{V}_1=3\times2,5\times x$

$\boxed{\mathcal{V}_1=7,5x\ (\text{m}^3).}$

b) Volume du réservoir R_2 :

$\mathcal{V}_2=\pi\times x^2\times2,5$

$\boxed{\mathcal{V}_2=2,5\pi x^2\ (\text{m}^3).}$

3) La fonction $f_1:x\mapsto7,5x$ est de la forme $x\mapsto ax$ avec $a=7,5$: elle est donc linéaire, de coefficient de linéarité 3.

4) La fonction f_1 étant linéaire, sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine.
Pour les valeurs de x comprises entre 0,5 et 1,5, il s'agit donc d'un segment.

5) D'après le graphique :

a) Lorsque $x=0,8$, le réservoir R_2 a un volume d'environ 5 m^3.

b) Pour que le réservoir R_2 ait une contenance de 10 m^3, son rayon doit être environ égal à 1,13 m.

c) Antécédent de 9 par la fonction f_1 :

Le nombre 9 admet un unique antécédent par la fonction f_1 : c'est 1,2.
Pour que le réservoir R_1 ait une contenance de 9 m^3, il doit avoir un rayon de 1,2 m.

d) Les volumes des deux réservoirs sont égaux si $x\approx0,95$.

e) La courbe représentant la fonction f_1 est au-dessus de celle représentant la fonction f_2 si $0,5\leqslant x\leqslant0,95$.
Le volume du réservoir R_1 est donc supérieur à celui du réservoir R_2 pour les valeurs de x comprises entre 0,5 et 0,95.

Exercice 6 :

1) On souhaite calculer, avec un tableur, les valeurs de l'expression x^2+x-2 pour des valeurs de x variant de 0,5 en 0,5.
Sur la feuille de calcul fournie en ***annexe*** :
a) Indiquer dans la cellule **A3** la formule à saisir donnant le nombre obtenu en ajoutant 0,5 au nombre entré dans la cellule **A2**.
b) Indiquer dans la cellule **B2** la formule à saisir pour obtenir la valeur de l'expression x^2+x-2 lorsque la valeur de x est celle entrée dans la cellule **A2**.
c) Indiquer dans la cellule **B3** la formule obtenue en copiant celle saisie dans la cellule **B2**.

2) La feuille de calcul ci-contre présente en colonne B les valeurs prises par l'expression x^2+x-2 pour les valeurs de x inscrites en colonne A, variant de -5 à 5 avec un pas de 0,5.

On souhaite résoudre l'équation d'inconnue x : $x^2+x-2=4$.
a) Margot dit que le nombre 2 est solution. A-t-elle raison ? Justifier.
b) Léo pense que le nombre 18 est solution. A-t-il raison ? Justifier.
c) Peut-on trouver une autre solution ? Justifier.

	A	**B**
1	x	x^2+x-2
2	-5	18
3	$-4,5$	13,75
4	-4	10
5	$-3,5$	6,75
6	-3	4
7	$-2,5$	1,75
8	-2	0
9	$-1,5$	$-1,25$
10	-1	-2
11	$-0,5$	$-2,25$
12	0	-2
13	0,5	$-1,25$
14	1	0
15	1,5	1,75
16	2	4
17	2,5	6,75
18	3	10
19	3,5	13,75
20	4	18
21	4,5	22,75
22	5	28

Correction :

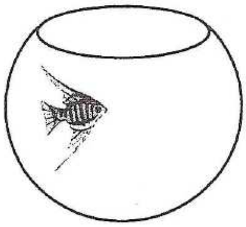
2) a) D'après la 16ème ligne de la feuille de calcul, lorsque $x=2$, on a $x^2+x-2=4$: le nombre 2 est donc solution de l'équation $x^2+x-2=4$.
Donc Margot a raison.

b) Si $x=18$, alors : $x^2+x-2=18^2+18-2=324+16=\underline{340\neq 4}$: le nombre 18 n'est donc pas solution de l'équation $x^2+x-2=4$.
Donc Léo a tort.

c) D'après la 6ème ligne de la feuille de calcul, lorsque $x=-3$, on a $x^2+x-2=4$: le nombre -3 est donc une autre solution de l'équation $x^2+x-2=4$.

Exercice 7 :

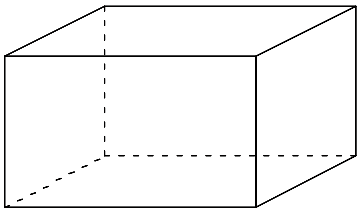
1) Dessiner un pavé droit en perspective cavalière.
2) Un aquarium a la forme d'un pavé droit de longueur 40 cm, de largeur 20 cm et de hauteur 30 cm. Calculer le volume, en cm^3, de ce pavé droit.
3) Parmi les formules suivantes, recopier celle qui donne le volume, en cm^3, d'une boule de diamètre 30 cm :
$\frac{4}{3}\times\pi\times30^3$; $4\pi\times15^2$; $\frac{4}{3}\times\pi\times15^3$.



4) Un second aquarium contient un volume d'eau égal aux trois quarts du volume d'une boule de diamètre 30 cm. On verse son contenu dans le premier aquarium.
A quelle hauteur l'eau monte-t-elle ? Donner une valeur approchée au millimètre.

Correction :

1) Pavé droit en perspective cavalière :



2) Volume du premier aquarium :

$$\mathcal{V}=L\times l\times h$$
$$\mathcal{V}=40\times20\times30$$
$$\boxed{\mathcal{V}=24\,000\text{ cm}^3.}$$

3) La formule donnant le volume en cm^3 d'une boule de diamètre 30 cm est : $\frac{4}{3}\times\pi\times15^3$.

4) $\frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{3}\times\pi\times15^3\right)=\left(\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\right)\times\left(\pi\times15^3\right)=\pi\times15^3=3375\pi$.
Le second aquarium contient 3375π cm^3 d'eau.

La hauteur h (en cm) dont l'eau monte dans le premier aquarium vérifie :

$$40\times20\times h=3375\pi$$
$$800h=3375\pi$$
$$h=\frac{3375\pi}{800}$$
$$\boxed{h=\frac{135\pi}{32}\text{ cm}} \quad \text{(valeur exacte)}$$
$$\boxed{h\approx13{,}3\text{ cm}} \quad \text{(valeur arrondie au mm).}$$

L'eau monte à une hauteur d'environ 13,3 cm.

Numéro d'anonymat : ……………………………

Annexe

(à rendre avec la copie de composition)

<u>Exercice 5 :</u>

1) <u>Tableau :</u>

Longueur x (en m)		0,5	1,2
Volume du réservoir R_1 (en m^3)		3,75	9
Volume du réservoir R_2 (en m^3)	Valeur exacte	$0,625\pi$	$3,6\pi$
	Valeur arrondie à 0,1 m^3	2	11,3

4) 5) <u>Graphique :</u>

<u>Exercice 6 :</u>

1) <u>Feuille de calcul :</u>

	A	B
1	x	x^2+x-2
2	[redacted]	$=\mathrm{A2*A2+A2-2}$
3	$=\mathrm{A2+0,5}$	$=\mathrm{A3*A3+A3-2}$